SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A IX-a

Subiectul 1. a) Inegalitatea este echivalentă cu $(x-y)^2(x+y) \geq 0$. .... 4 puncte

Prin adunarea inegalităţilor sugerate de a) obţinem concluzia . . 3 puncte

Subiectul 2. *Prima soluţie*: Putem presupune $b \geq c$. Atunci A, I şi G se proiectează pe semidreapta $[MB$ în A', I' şi G' (M este mijlocul laturii BC). .... 1 punct

Avem $MI' = MB - BI' = \frac{a}{2} - (p-b) = \frac{b-c}{2}$ .... 2 puncte

Apoi,

$$MG' = \frac{1}{3}MA' = \frac{1}{3}|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{A'B}| = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) = \frac{b^2-c^2}{6a}$$

.... 2 puncte

Rezultă $IG \perp BC \iff I'$ coincide cu $G' \iff MI' = MG' \iff (b-c)(b+c-3a) = 0 \iff b = c$ sau $b+c = 3a$. .... 2 puncte

A doua soluţie: Avem $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ şi $\overrightarrow{AI} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$, deci

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3(a+b+c)}\left((a+c-2b)\overrightarrow{AB} + (a+b-2c)\overrightarrow{AC}\right) \text{ 3 puncte}$$

Din $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$ .... 1 punct

rezultă

$$\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$\frac{1}{3(a+b+c)}\left((a+b-2c)b^2 - (a+c-2b)c^2 + (3c-3b)\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{6}(c-b)(b+c-3a)$$

.... 2 puncte

Astfel $IG \perp BC \iff \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff b = c$ sau $b + c = 3a$....1 punct

Subiectul 3. Cum A este ortocentrul triunghiului BHC, care este simetric faţă de M_1 cu triunghiul BA_1C, rezultă că A_2 este simetricul lui A faţă de M_1 .... 2 puncte

a) Dacă P este un punct oarecare atunci $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PM_1} = \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA_2}$. Rezultă $\sum \overrightarrow{PA_2} = \sum \overrightarrow{PA}$, de unde concluzia .... 2 puncte

b) Fie G_A centrul de greutate al triunghiului AA_1A_2. Atunci

$$\overrightarrow{HG_A} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{HA_2}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AM_1}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{HM_1},$$

deci

$$\overrightarrow{G_AG_B} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{HM_2} - \overrightarrow{HM_1}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

şi analoagele. De aici rezultă asemănarea cu raport $\frac{2}{3}$. ....3 puncte

Subiectul 4. a) Dacă toţi termenii şirului ar fi nenuli, atunci

$$a_1 \geq a_2+a_3 \geq a_4+a_5+a_6+a_7 \geq \cdots \geq a_{2^n}+a_{2^n+1}+a_{2^n+2}+\cdots+a_{2^{n+1}-1} \geq 2^n$$

pentru orice n, contradicţie .... 2 puncte

Apoi, dacă $a_k = 0$ atunci din

$$0 \geq a_{2^pk} + a_{2^pk+1} + a_{2^pk+2} + \cdots + a_{2^pk+2^p-1}$$

rezultă că avem 2^p termeni consecutivi care sunt nuli.............. 2 puncte

b) Un exemplu este

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ dacă } n = 2^p, \ \ p \in \mathbf{N} \\ 0 \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

....3 puncte.